Formulaire de développement limités

Les développements limités ci-dessous sont valables quand **x tend vers 0** et uniquement dans ce cas.

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right)$$

$$\text{ch}x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right) \quad \left(\text{et même } o\left(x^{2n+1}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} \text{sh}x &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \quad \left(\text{et même } o\left(x^{2n+2}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+3}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right) \quad \left(\text{et même } o\left(x^{2n+1}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \quad \left(\text{et même } o\left(x^{2n+2}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+3}\right)\right) \end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned} (1+x)^a &\underset{x\to 0}{=} 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right) \quad (a \text{ réel donné}) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + o\left(x^n\right) \text{ et en particulier } (1+x)^a \underset{x\to 0}{=} 1 + ax + o(x) \text{ et donc } \sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \end{aligned}$$

....

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \ldots - \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Arctan}x &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \quad \left(\text{et même } o\left(x^{2n+2}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+3}\right)\right) \end{aligned}$$

Les développements en 0 de Arcsin et de tan et th ne font pas partie du cours mais constituent une activité classique en classe préparatoire.

Formulaire d'équivalents usuels

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \qquad \ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \mathrm{sh}\,(x) \underset{x\to 0}{\sim} \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} \mathrm{th}\,(x) \underset{x\to 0}{\sim} \arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2},\ \mathrm{ch}\,(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\arccos(x) \underset{x\to 1,\ x<1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x},$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x,\ (\alpha \neq 0)$$

$$\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x,\ \sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

$$\mathrm{ch}\,(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \mathrm{sh}\,(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

Les théorèmes de croissances comparées

$$\forall a > 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x^\alpha \underset{x\to +\infty}{=} o(a^x)$$
$$\forall q > 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ n^\alpha \underset{n\to +\infty}{=} o(q^n)$$
$$\forall a \in]0,1[,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ a^x \underset{x\to +\infty}{=} o(x^\alpha)$$
$$\forall q \in]0,1[,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ q^n \underset{n\to +\infty}{=} o(n^\alpha)$$
$$\forall a > 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ a^x \underset{x\to -\infty}{=} o(|x|^\alpha)$$

$$\forall a > 1,\ \forall \alpha > 0,\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \log_a^\beta(x) \underset{x\to +\infty}{=} o(x^\alpha)$$
$$\forall a > 1,\ \forall \alpha > 0,\ \log_a^\beta(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \text{ (ou encore } x^\alpha \log_a^\beta(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{\to} 0)$$

Quand n tend vers $+\infty$,

$$1 \ll \ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt[3]{n} \ll \sqrt{n} \ll n \ll n\ln(n) \ll n\sqrt{n} \ll n^2 \ll (1,01)^n \ll n! \ll n^n$$

et aussi,

$$1 \gg \frac{1}{\ln(\ln(n))} \gg \frac{1}{\ln(n)} \gg \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \gg \frac{1}{\sqrt{n}} \gg \frac{1}{n} \gg \frac{1}{n\ln(n)} \gg \frac{1}{n\sqrt{n}} \gg \frac{1}{n^2} \gg \frac{1}{(1,01)^n} \gg \frac{1}{n} \gg \frac{1}{n^n}$$